DESDE 2023
https://revista.ccaitese.com

RICT Revista de Investigación Científica, Tecnológica e Innovación

Publicación Semestral RICT Vol. 2 No. 3 (2024) Páginas 12-18

ISSN: 2992-7315

Utilización del método numérico de la cuadratura de Carl Friedrich Gauss en conducción de calor. Use of the numerical method of Carl Friedrich Gauss's quadrature in heat conduction.

Áyax Saúl Martínez Magaña[1], Esiquio Martin Gutiérrez Armenta[2], Marco Antonio Gutiérrez Villegas[3], Israel Isaac Gutiérrez Villegas[4], Javier Norberto Gutiérrez Villegas[5], María de Lourdes Sánchez Guerrero[6], Josué Figueroa González[7], Nicolás Domínguez Vergara[8], Alfonso Jorge Quevedo Martinez[9], Julio Lara García[10], Minerva del Mar Gutiérrez Armenta[11], Juan Manuel Figueroa Flores[12]

[1,2,3,6,7,8]Departamento de Sistemas, UAM-AZC, México, Ciudad de México.
[4,5]División de Ingeniería en Sistemas Computacionales, TESE- TecNM, Estado de México.
[9]Departamento de Administración, UAM-AZC, México, Ciudad de México.
[10]División de Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Tecámac (UPT), Estado de México.
[11]Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME-Zacatenco, México D.F., México.
[12]Departamento de Ingeniería y Ciencias Sociales, ESFM-IPN, México, Ciudad de México.
Teléfono 55 1339-1343 Fax (55) 5729-55015 E-mail: esiqv11@hotmail.com

Resumen

En este artículo tiene la finalidad de mencionar la gran aportación del matemático Riemann Georg Friedrich Bernhard, que dio el paso a la integración analítica a lo que hoy se llama cálculo integral, y al teorema fundamental de cálculo, para encontrar la solución de una función de manera analítica pero en general hay una infinidad de las cuales no se puede encontrar esta , se utilizara un método que cualquiera puede utilizar, con estos métodos se realizan aplicaciones en la cual una si se tiene buenos resultados, pero en otra pasa lo contrario los resultados no son buenos, también se calcula la primitiva para compararlos con esta , en este trabajo se utilizara el método numérico de la cuadratura de Carl Friedrich Gauss..

Palabras Clave: Seno, Coseno, tangente, Derivada

Abstract

The purpose of this article is to mention the great contribution of the Riemann mathematician Georg Friedrich Bernhard, who gave way to analytical integration to what is now called integral calculus, and to the fundamental theorem of calculus, to find the solution of a function of analytical way but in general there are an infinity of which this cannot be found, a method that anyone can use will be used, with these methods applications are made in which one does have good results, but in another the opposite happens the results they are not good, the primitive is also calculated to compare them with this one, in this work the numerical method of the quadrature of Carl Friedrich Gauss will be used.

Keywords: Sine, Cosine, Tangent, Derivative

1. Introducción

*Autor para la correspondencia: al2182003847@azc.uam.x
Correo electrónico: al2182003847@azc.uam.x (Áyax-Saúl Martínez-Magaña)

Historial del manuscrito: recibido el 07/09/2023, última versión-revisada recibida el 09/11/2023, aceptado el 30/11/2023, en línea (postprint) desde el 08/04/2024, publicado el 09/04/2024. **DOI:** https://doi.org/10.2992/rict.v2i3.23

La técnica sobre las series de Taylor de Winslow Taylor a principios del siglo XVII, se consideraron estas series infinitas, para el desarrollo del seno, coseno, tangente, logaritmo natural
ln(1+x), que fueron obtenidas por técnicas geométricas por Leibniz, para más detalles consultarse el artículo de Frédéric Barbaresco and Jean-Pierre Gazeau (2019)., en análisis armónico conmutativo lo aborda Rahim Kouki , Barry J. Griffiths, (2020), de utilizando curvas sinusoidales para describir la temperatura, este fue pasando como una idea matemática que dada Cualquier función se podría descomponerse en una combinación lineal de funciones seno. Esta se aplica en resolver ecuaciones diferenciales parciales que se originaron a partir de la física y matemáticas, en espacios Euclideanos, Hanwen Guan, Haoyi Song, Yang and Jiayuan Zhang, (2021), una demostración rigorosa del teorema de sobre superposición no lineal, se construirle a partir del álgebra de Lie en espacios vectoriales. Este es argumento más convincente que apoya el uso de esta definición alternativa de la regla de superposición, se muestra que esta definición permite una generalización inmediata del Teorema de Lie para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, Josué F. Cariñena, (2006). El método de separación de variables y el principio de superposición para resolver el problema de conducción de calor en estado estable para un rectángulo finito con las siguientes dimensiones $0 \le x \le a$ y $0 \le y \le b$. Las condiciones de frontera conocidas de primer tipo utilizadas por Peter Gustav Lejeune Dirichlet que resolvió el problemas de potencial en una región cerrada con condiciones de frontera, para asegurar la existencia y unicidad de la solución, la ecuación de Laplace cumple con esta condición, a este se le conoce como problema de Peter Gustav Lejeune Dirichlet, al cual se tenía que encontrar una función armónico con la condición de contorno derivada normal $\frac{d\phi}{dn} = g(x).x\partial\Gamma$ frontera donde n es la normal exterior a la superficie de la frontera**.** se llama condición de frontera del segundo tipo, de Carl Gottfried Neumann (1832-1925), Alexander H.-D. Chenga, Daisy T. Cheng. (2005), También en su artículo Pushpendra Singh , Amit Singhal, Binish Fatimah, Anubha Gupta and Shiv Dutt Josh.(2021).realizan una demostración completa cuando se obtiene una única solución y no tiene.
Las condiciones de frontera del Tipo Dirichlet, con temperaturas fijas, o indeterminadas para paredes aisladas (o también llamadas paredes adiabáticas).

En este trabajo se mantienen tres lados del rectángulo (cuadrado) tipo Dirichlet $T|_{\Gamma_{1,2,3}}$ temperaturas constantes las cuales son funciones de su posición a lo largo de la cara donde se encuentra.

2. Metodologia a desarrollar

Se hará uso del teorema del principio de superposición para descomponer el problema en cuatro para este caso se usará la figura 1. Donde se muestra este principio para facilitar el desarrollo, con esta se obtendrán cuatro problemas en los cuales se utilizará el método de variables separable para cada uno de estos (método de Fourier). Planteamiento del problema, sea la ecuación de Laplace en dos dimensiones dada por la ecuación 1.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \tag{1}$$

Con las condiciones de frontera.

$$T = f_1(y) \qquad x = 0 \tag{1.a}$$
$$T = f_2(y) \qquad y = a = L \tag{1.b}$$
$$T = f_3(x) \qquad y = 0 \tag{1.c}$$
$$T = f_4(x) \qquad y = b = W \tag{1.d}$$

Donde Utilizando superposición se separa la ecuación 1, con sus condiciones de frontera (1 a, b, c, d) en cuatro problemas simples, que la solución general es de la forma:

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) + T_3(x,y) + T_4(x,y) \tag{2}$$

La figura 1 muestra al sistema de la ecuación 1 con sus condiciones de frontera (1 a, b, c, d), en cuatro problemas simples. Estos se resolverán por el método de separación de variables (Fourier).

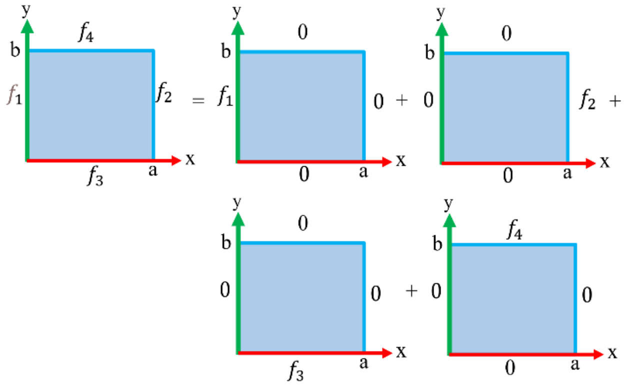

Figura 1. Muestra como un problema de Laplace

En un cuadrado se descompone en cuatro problemas más simples utilizando el principio de superposición basándose en la formulación descrita en Jambrina, L (2023).

Aplicando este principio se expresan en cuatro figuras las cuales tienen su expresión matemática con sus condiciones de frontera. Se resolverán cuatro casos.

Caso 1
Donde la función $T_1(x,y)$ se representa como

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \tag{1.1}$$

Utilizando las condiciones de frontera son 1a, 1b, 1c y 1d.
Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$T_1 = f_1(y) \qquad y = 0 \tag{1.1 a}$$

$$T_1 = 0 \qquad x = a = L \qquad (1.1\text{ b})$$
$$T_1 = 0 \qquad y = 0 \qquad (1.1\text{ c})$$
$$T_1 = 0 \qquad y = b = W \qquad (1.1\text{ d})$$

Caso 2

Donde la función $T_2(x,y)$ se representa como

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0$$
$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \qquad (2.1)$$

Utilizando las condiciones de frontera son 1a, 1b, 1c y 1d. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$T_2 = 0 \qquad x = a = L \qquad x = 0 \qquad (2.1\text{ a})$$

$$T = f_2(y) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{T}_2}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\Gamma_2} = (\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T}_\infty) \qquad x = a = L = w \qquad (2.1\text{ b})$$

Donde $\boldsymbol{T_S}$ la temperatura de la superficie del cuero ya no tiene influencia sobre el material. $\boldsymbol{T}_\infty$ = es la temperatura del medio ambiente.

$$T_2 = 0 \qquad y = 0 \qquad (2.1.\text{c})$$
$$T_2 = 0 \qquad y = b = W \qquad (2.1.\text{d})$$

Caso 3.

Para $T_3(x,y)$ como:

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} = 0$$
$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \qquad (3.1)$$

Las Condiciones de frontera:

$$T_3 = 0 \qquad x = 0 \qquad (3.1.\text{a})$$
$$T_3 = 0 \qquad x = a = L \qquad (3.1.\text{b})$$

$$T_3 = f_3(x) \qquad y = 0 \qquad (3.1.\text{c})$$
$$T_3 = 0 \qquad y = b = W \qquad (3.1.\text{d})$$

Caso 4

Resolviendo el caso 4.

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} = 0$$
$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \qquad (4.1)$$

Las Condiciones de frontera:

$$T_4 = 0 \qquad x = 0 \qquad (4.1.\text{a})$$
$$T_4 = 0 \qquad x = a = L \qquad (4.1.\text{b})$$
$$T_4 = 0 \qquad y = 0 \qquad (4.1.\text{c})$$
$$T_4 = f_4(x) \qquad y = b = W \qquad (4.1.\text{d})$$

Resolviendo los cuarto casos para estos se propone una solución de la forma:

$$T_4(x,y) = X(x)Y(y) \qquad (4.\text{a})$$

Obteniendo las segundas derivadas parciales de la ecuación 4.a con respecto a x, y sustituyendo en la ecuación 4 se obtiene:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda^2 \quad , \quad \lambda^2 > 0 \qquad (\text{a}5)$$

La cuales solo tiene solución para $\lambda^2 > 0$ de la ecuación a5 se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad (\text{a}6)$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \qquad (\text{a}7)$$

Donde sus soluciones dadas por:

$$X = c_1\cos(\lambda x) + c_2 sen(\lambda x) \qquad (\text{a}8)$$
$$Y = c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y} \qquad (9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (a8- a9) en la ecuación (4a):

$$T_4(x,y) = \left(c_1\cos(\lambda x + c_3\text{sen}(\lambda x)\right)\left[c_3 e^{\lambda y} + c_4 e - ^{\lambda y}\right] \qquad (\text{a}10)$$

Aplicando la condición de frontera en la ecuación 4a:

$$T_4(0,y) = [c_1(1) + c_2(0)]\left[c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y}\right] = 0 \qquad (\text{a}11)$$

se tiene:

$$c_1 = 0 \qquad (\text{a}12)$$
$$T_4(x,y) = c_2 sen(\lambda x)\left[c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y}\right] \qquad (\text{a}13)$$
$$(\text{a}14)$$

de la ecuación (4c):

$$T_4(x,0) = c_2 sen(\lambda x)\left[c_3 e^{-\lambda(0)} + c_4 e^{\lambda(0)}\right] \qquad (\text{a}15)$$

$$T_4(x,0) = c_2 sen(\lambda x)[c_3 + c_4] = 0 \qquad (\text{a}16)$$
$$c_3 + c_4 = 0 \qquad (\text{a}17)$$

Se obtiene la ecuación (a18):

$$c_3 = -c_4 \qquad (\text{a}18)$$

utilizando la condición de frontera a la ecuación (4b)

$$T_4(L,y) = c_2 c_4 sen(\lambda L)\left[e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}\right] = 0 \qquad (\text{a}19)$$

Todas las constantes deben ser diferente de cero. debido a que la función exponencial es diferente de cero en todo $\mathbb{R}$, así que se tiene la única posibilidad es que:

$$sen(\lambda L) = 0 \qquad (\text{a}20)$$

Esto sólo puede tenerse si de la ecuación (a20) el argumento sea cero esto debe cumplir (a21):

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{para } n = 1,2,\ldots \qquad (\text{a}21)$$

Por el principio de superposición para las constantes C_n , así utilizando la identidad $2senh(\lambda x) = e^{\lambda x} - e^{-x\lambda}$ se tiene:

$$T_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right) \qquad (\text{a}22)$$

Utilizando la condición de la ecuación (4d):

$$T_4(x,W) = f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) \qquad (\text{a}23)$$

Usando el principio de ortogonalidad de la serie de Taylor:

$$c_n senh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)=\frac{2}{L}\int_0^L f_4(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (a24)$$

Despejando a C_n

$$c_n=\frac{2}{L\, senh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)}\int_0^L f_4(x) sen\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)dx \quad (a25)$$

Sustituyendo en la ecuación (a25-a22)

$$T_4(x,y)=\frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{senh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)}\left[\int_0^L f_4(x')sen\left(\frac{n\pi\, x'}{L}\right)dx'\right] \quad (a26)$$

La ecuación (a26) es la solución de la ecuación 4 sujeta a las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (4a -4d).

SOLUCIÓN PARA EL CASO 1.

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad 1$$

Condiciones de frontera para el caso 1

$$T_1=f_1(y) \qquad x=0 \qquad (1a)$$

$$T_1=0 \qquad x=a=L \qquad (1b)$$

$$T_1=0 \qquad y=0 \qquad (1c)$$

$$T_1=0 \qquad y=b=W \qquad (1d\ )$$

Se vuelve a proponer una solución de la forma

$$T_1(x,y)=X(x)Y(y) \quad (a5)$$

Derivando parcialmente a la ecuación (b5) con respecto a x, y y sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que son

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=\lambda^2 \quad , \quad \lambda^2>0 \quad (a6)$$

de la ecuación (a6) se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda^2 Y=0 \quad (a7)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda^2 X=0 \quad (a8)$$

Donde las soluciones para ésta están dadas por

$$Y(y)=c_1\cos(\lambda y)+c_2 sen(\lambda y) \quad (a9)$$

$$X(x)=c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x} \quad (a10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (a9) y (b10) en la ecuación (a5)

$$T_1(x,y)=\left[c_1\cos(\lambda y)+c_2 sen(\lambda y)\right]\left[c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x}\right] \quad (a11)$$

Aplicando la condición de frontera (3b) .

$$T_1(x,0)=\left[c_1\cos(\lambda(0))+c_2 sen(\lambda(0))\right]\left[c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x}\right]=0 \quad (a12)$$

$$T_1(x,0)=\left[c_1\cos(0)+c_2 sen(0)\right]\left[c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x}\right]=0 \quad (a13)$$

$$T_1(x,0)=\left[c_1(1)+c_2(0)\right]\left[c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x}\right]=0 \quad (a14)$$

De donde

$$c_1=0 \quad (a15)$$

$$T_1(x,y)=c_2 sen(\lambda y)\left[c_3e^{-\lambda x}+c_4e^{\lambda x}\right] \quad (a16)$$

Aplicando la condición de frontera dada por la ecuación (1b)

$$T_1(L,y)=c_2 sen(\lambda y)\left[c_3e^{-\lambda L}+c_4e^{\lambda L}\right]=0 \quad (a17)$$

Para este caso se tiene la siguiente suposición $e^{\lambda L}\to senh(\lambda L)$ para $x>>0$ (grandes), $e^{-\lambda L}\to senh(\lambda L)$ para x pequeños, entonces la ecuación (a17) se escribe de la siguiente manera $senh(\lambda L)[c_3+c_4]=0$. Como $senh(\lambda L)\ne 0$ así $c_3+c_4=0$ de esta $c_3=-c_4$ Sustituida en la ecuación (a14)

$$T_1(x,y)=c_2c_4\ sen(\lambda y)senh(\lambda x) \quad (a18)$$

Aplicando la condición de frontera dada por la ecuación (1 d)

$$T_1(x,W)=c_3c_2 sen(\lambda W)senh(\lambda x)=0 \quad (a18)$$

Donde las constantes deben ser diferente de cero así que la única posibilidad es que

$$sen(\lambda W)=0 \quad (a19)$$

Esto sólo puede tenerse si

$$\lambda=\frac{n\pi}{W},\quad \text{para } n=1,2,... \quad (a20)$$

$$T_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right)senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right) \quad (a21)$$

Utilizando la condición (1a)

$$T_1(0,y)=f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen\left(\frac{n\pi y}{L}\right)senh\left(\frac{n\pi(0)}{W}\right)$$

$$T_1(0,y)=f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (a22)$$

$$T_1(0,y)=f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n sen\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Usando la ortogonalidad

$$c_n=\frac{2}{W}\int_0^W f_1(y)sen\left(\frac{n\pi\, y}{W}\right)dy \quad (a23)$$

Sustituyendo la ecuación (b23) en la ecuación (b21)

$$T_1(x,y)=\frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty}senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right)\int_0^W f_1(y')sen\left(\frac{n\pi\, y'}{W}\right)dy' \quad (a24)$$

La ecuación (b24) es la solución de la ecuación (1) sujeta a las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2a, 2b, 2c, 2d)

SOLUCIÓN PARA EL CASO 2

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad (2)$$

Condiciones de frontera:

$$T_2=0 \qquad x=0 \qquad (2a)$$

$$T_2=f_2(y)==\left.\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\Gamma_2}=(\boldsymbol{T}_S-\boldsymbol{T}_\infty) \qquad x=a=L \qquad (2b)$$

$$T_2=0 \qquad y=0 \qquad (2\ c)$$

$$T_2=0 \qquad y=b=W \qquad (2\ d)$$

Realizando un proceso análogo al anterior

$$T_2(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \qquad \text{(b5)}$$

Calculando las segundas derivadas parciales de la ecuación b5 con respecto a x, y sustituyendo en la ecuación 2 se obtiene:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda^2, \lambda > 0 \qquad \text{(b6)}$$

De la ecuación (b6) se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \lambda^2 Y(y) = 0 \qquad \text{(b7)}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dy^2} - \lambda^2 X(x) = 0 \qquad \text{(b8)}$$

Donde las soluciones para ésta están dadas por:

$$Y(y) = c_1\cos(\lambda y) + c_2 \mathrm{sen}(\lambda \mathrm{y}) \qquad \text{(b9)}$$

$$X(x) = c_3 e^{\lambda x} + c_3 e^{-\lambda x} \qquad \text{(b10)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b9-b10) en la ecuación (b5)

$$T_2(x,y) = \left[c_1\cos(\lambda y) + c_2 \mathrm{sen}(\lambda y)\right]\left(c_3 e^{\lambda x} + c_4 e^{-\lambda x}\right) \qquad \text{(b11)}$$

Derivando $\frac{\partial T_2}{\partial y} = -\lambda\cos(\lambda y) + c_2\lambda\cos(\lambda y)$ aplicando la condición de frontera de la ecuación (2b) para esto se tiene que derivar parcialmente con respecto a y la ecuación b11:

$$\frac{\partial T_2(x,y)}{\partial y} = \left[-\lambda c_1 \mathrm{seno}(\lambda \mathrm{y}) + \lambda c_2\cos(\lambda y)\right] = (\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty}) \qquad \text{(12b)}$$

Utilizando la condición de frontera ecuación (2b) la siguiente teoría se utiliza para $N \in \mathrm{N}, N > 1$ se pueden tomar las siguientes sumatorias para las series seno y coseno. $\sum_{i=1}^{N}\cos(\frac{2k\pi}{\boldsymbol{N}}) = 0$, $\sum_{i=1}^{N}\sin(\frac{2k\pi}{\boldsymbol{N}})$ para una ampliación sobre el tema ver Michael P. Knapp Loyola, S. Greitzer, la demostración del teorema la realiza

Many cheerful Facts Arbelos 4 (1986), no. 5, 14–17. 2. J. Holdener, Math bite: Sums of Sines and Cosines, this Magazine, 82 (2009), 126 utilizando números complejos.

Las pruebas de estas dos identidades son un buen ejercicio de álgebra compleja: usando el teorema de DeMoivre y la fórmula de Euler, $e^{i(2\pi)} = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)}\right)^N = 1$ se derivan las identidades de la parte real e imaginaria se obtiene la siguiente ecuación

$$\sum_{i=1}^{N}(\cos(\frac{2\pi k}{n})) + i\,sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)) = \sum_{K0=}^{N-1}\frac{\left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)^N - 1}{\left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)^N - 1} = 0 .$$

$$\frac{\partial T_2(0,w)}{\partial y} = \left[-\lambda c_1 \mathrm{seno}(\lambda \mathrm{w}) + \lambda c_2\cos(\lambda w)\right] = (\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty}) \qquad \text{(b13)}$$

Como el segundo término de la ecuación (b13) no puede ser cero entonces se debe de tener:

$$\mathrm{seno}(\lambda \mathrm{w}) = \cos(\lambda w) \qquad \text{(b14)}$$

$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$; $\sin(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$; en estos casos al evaluar es cero.

También ser puede ser utilizado en este caso.

$$T_2(x,y) = c_4\left[c_1\cos(\lambda y) + c_2 sen(\lambda y)\right] \qquad \text{(b15)}$$

Con la condición de la ecuación (2c):

$$T_2(x,0) = \left[c_1\cos(\lambda(0)) + c_2 sen(\lambda(0))\right] = 0 \qquad \text{(b16)}$$

$$T_2(x,0) = \left[c_1(1) + c_2(0)\right] = 0 \qquad \text{(b17)}$$

De aquí $c_1 = 0$:

$$T_2(0,y) = c_2 sen(\lambda y) \qquad \text{(b17.1)}$$

Aplicando las condiciones de frontera (2d)

$$T_4(x,W) = c_2 sen(\lambda W) = 0 \qquad \text{(b18)}$$

Donde las constantes deben ser diferente de cero así que la única posibilidad es que

$$sen(\lambda W) = 0 \qquad \text{(b19)}$$

Esto sólo puede tenerse si

$$\lambda = \frac{n\pi}{W}, \quad \text{para } n = 1,2,... \qquad \text{(b20)}$$

Utilizando el principio de superposición para las soluciones y sustituyendo la identidad $2senh(\lambda y) = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}$,las constantes c_n .

$$T_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right) senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)(\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty}) \qquad \text{(b21)}$$

De la condición tomando la ecuación (2b)

$$T_2(L,y) = (\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty})\sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi y}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right) \qquad \text{(b22)}$$

Usando la ortogonalidad

$$c_n senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right) = \frac{2(\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty})}{W}\int_0^W sen\left(\frac{n\pi\, y}{W}\right) dy \qquad \text{(b23)}$$

Despejando c_n de la ecuación (b23)

$$c_n = \frac{2(\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty})}{W senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)}\int_0^W sen\left(\frac{n\pi\, y}{W}\right) dy \qquad \text{(b24)}$$

Sustituyendo la ecuación (b24) en la ecuación (b21)

$$T_2(x,y) = \frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)}{senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)}\int_0^w sen\left(\frac{n\pi\, y'}{W}\right) dy' \qquad \text{(b25)}$$

La ecuación (b25) es la solución de (2) sujeta a las ecuaciones (2a, 2b, 2c, 2d)

SOLUCIÓN DEL CASO 3

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W$$

$$T_3 = 0 \qquad x = 0 \tag{3a}$$
$$T_3 = 0 \qquad x = a = L \tag{3b}$$
$$T_3 = f_3(x) \qquad y = 0 \tag{3c}$$
$$T_3 = 0 \qquad y = b = W \tag{3d}$$

Se propone una solución de la forma
$$T_3(x,y) = X(x)Y(y) \tag{a5}$$
Calculando las segundas derivadas parciales de la ecuación (a5) con respecto a x, y y sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene
$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda^2 \quad , \quad \lambda^2 > 0 \tag{a6}$$
De la ecuación (a6) se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden
$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{a7}$$
$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{a8}$$
Donde las soluciones están dadas por
$$X = c_1\cos(\lambda x) + c_2 sen(\lambda x) \tag{a9}$$
$$Y = c_3 e^{-\lambda y} + c_4 e^{\lambda y} \tag{a10}$$
Sustituyendo la ecuación (a9) y (a10) en la ecuación (a5)
$$T_3(x,y) = \left[c_1\cos(\lambda y) + c_2 sen(\lambda y)\right]\left[c_3 e^{-\lambda x} + c_4 e^{\lambda x}\right] \tag{a11}$$
Aplicando la condición de frontera dada por la ecuación (3a)
$$T_3(0,y) = \left[c_1\cos(\lambda 0) + c_2 sen(\lambda 0)\right]\left[c_3 e^{-\lambda x} + c_4 e^{\lambda y}\right] = 0 \tag{a12}$$
$$T_3(0,y) = \left[c_1(1) + c_2(0)\right]\left[c_3 e^{-\lambda x} + c_4 e^{\lambda}\right] = 0 \tag{a14}$$
De donde se tiene que
$$c_2 = 0 \tag{a15}$$
$$T_3(x,y) = c_1 cos(\lambda y)\left[c_3 e^{-\lambda x} + c_4 e^{\lambda x}\right] \qquad \text{(a15') (a16)}$$
Utilizando la condición (3d)
$$T_3(x,W) = c_2 sen(\lambda x)\left[c_3 e^{-\lambda W} + c_4 e^{\lambda W}\right] = 0 \tag{a17}$$
Para este caso se tiene la siguiente suposición $e^{\lambda W} \to senh(\lambda W)$ para $x >> 0$ (grandes), $e^{-\lambda W} \to senh(\lambda W)$ para x pequeños, entonces por la ecuación (a17) se escribe de la siguiente manera
$$T_3(x,W) = c_2 sen(\lambda y) senh(\lambda W)\left[c_3 + c_4\right] = 0 \qquad \text{(a17) (a18)}$$
Como $senh(\lambda W), sen(\lambda x) \neq 0$ entonces:
$$c_3 + c_4 = 0 \tag{a19}$$
$$c_3 = -c_4 \qquad \text{a20)}$$
Sustituyendo en las ecuaciones (a20) y en (a16)
$$T_3(x,y) = c_2 c_4 sen(\lambda y) senh(\lambda y)$$
Aplicando la condición de frontera dada por la ecuación (3b)
$$T_3(L,y) = c_2 c_4 sen(\lambda y) senh(\lambda x) = 0 \tag{a21}$$
Donde las constantes deben ser diferente de cero y las funciones exponenciales también son diferentes de cero, así que la única posibilidad es que
$$sen(\lambda L) = 0 \tag{a22}$$
Esto sólo puede tenerse si
$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \tag{a23}$$
Utilizando el principio de superposición para las soluciones y sustituyendo $c_{1,}\ c_2$ por c_n.
$$T_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \tag{a24}$$
Utilizando la condición (3c)
$$T_3(x,0) = f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$T_3(x,0) = f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi(0)}{L}\right) \tag{a25}$$
$$T_3(x,0) = f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Usando la ortogonalidad
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_4(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{a26}$$
Sustituyendo la ecuación (a26) en la ecuación (a24)
$$T_3(x,y) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left[\int_0^L f_4(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx'\right] \tag{a27}$$
La ecuación (a27) es la solución de (3) sujeta a las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3a, 3b, 3c, 3d).
La solución de la ecuación (5) bajo las condiciones de frontera (5a, 5b, 5c, 5d) está dada por la ecuación(a28):

$$\begin{aligned} T(x,y) = {} & \frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty} senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right) sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right)\int_0^w f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) dy' + \\ & \frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)}{senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)} \int_0^w sen\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) dy' + \end{aligned} \tag{a28}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) senh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left[\int_0^L f_4(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx'\right] + \\ & \frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{senh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)} \left[\int_0^L f_4(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx'\right] \end{aligned}$$

La ecuación 28 es la solución del problema utilizando el principio de super posición que viene dada en la ecuación 2, el procedimiento puede ser utilizado para resolver con otro tipo de condiciones de frontera.

3. Conclusiones

Una de las formas sencilla pero procedimiento laboriosa de cálculo para este tipo de problemas, es el método separación de variables de Fourier, se puede utilizar la transformada de Laplace, pero este tiene un problema que cuando ya se tiene despejada la función transformada, se debe encontrar la función inversa de esta, por lo general hay dificultades ya que se requiere una buena habilidad en el cálculo transformada inversa, esta puede ser complicada para encontrarla, otra alternativa seria las técnicas numéricas por ejempló diferencias finita, elemento finito o elemento frontera. Pero estas soluciones obtenidas por estos métodos solo dan solución en unos puntos llamados nodos, y los anteriores son soluciones analíticas que sirven para obtener la solución en cualquier parte del modelo.

El resultado de este procedimiento se utilizará para realizar la validación de los métodos numéricos mencionados. Otro problema a resolver es cuando una de las caras de la frontera tiene condiciones de Neumann, esta condición es la derivada normal que no es otra cosa que la derivada direccional en la dirección normal a la superficie de la frontera correspondiente.

4. Agradecimientos

Los autores agradecen a la escuela Universidad Nacional Autónoma de México, al Tecnológico Nacional de México, al Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, y a la revista RICT Revista de Investigación Científica, Tecnológica e Innovación por su apoyo de la publicación del manuscrito.

5. Referencias

[1]. Arora, G., Joshi, V., & Garki, I. S. (2020). Developments in Runge–Kutta method to solve ordinary differential equations. En *Recent Advances in Mathematics for Engineering* (pp. 193–202). CRC Press.

[2]. *Grafiati. (2021) Journal articles on the topic '120219 - Ecuaciones diferenciales ordinarias*. (s/f).

[3]. Griffiths, B. J., & Kouki, R. (2019). Introducing Taylor series and local approximations using a historical and semiotic approach. *International electronic journal of mathematics education*, *15*(2). https://doi.org/10.29333/iejme/6293

[4]. Hubbard, J. H., Habre, S. S., & West, B. H. (2001). The convergence of an Euler approximation of an initial value problem is not always obvious. *The American mathematical monthly: the official journal of the Mathematical Association of America*, *108*(4), 326. https://doi.org/10.2307/2695239.

[5]. Jambrina, L. F., (2023), Capítulo 7 Ecuación de Laplace Departamento de Matemática e Informáticas aplicadas a las ingenierías civil y naval. Pp. 166-167.

[6]. Kamruzzaman, M. C. (2018). *A Comparative Study on Numerical Solution of Initial Value problem by Using Euler´s Method and Ruge-Kutta*.

[7]. Nurujjaman, M. (2020). *Enhanced Euler's Method to Solve First Order Ordinary Differential Equations with Better Accuracy*.

[8]. Youssef, I. K., & El-Arabawy, H. A. (2007). Picard iteration algorithm combined with Gauss–Seidel technique for initial value problems. *Applied Mathematics and Computation*, *190*(1), 345–355. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.058

[9]. Zhang Lijuan, G. (2018). comparison of several Numerical Algorithms for Solvin ordinary Differential Equation initial Value problem. *Advances in Computer Science Research*, *78*.