DESDE 2023
https://revista.ccaitese.com

RICT Revista de Investigación Científica, Tecnológica e Innovación

Publicación Semestral RICT Vol. 3 No. 5 (2025) P. 24 –31

ISSN: 2992-7315

Diseño, manufactura y control de un péndulo invertido con volante inercial. Design, manufacturing and control of an inverted pendulum with an inertial flywheel

Erick Axel Padilla García [a], Raúl Dalí Cruz Morales [b], Gonzalo Hedain López Mera [b], David Tinoco Varela [b]

[a] *Tecnológico Nacional de México/Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec (TESE), 55210, Ecatepec, Estado de México, México.*

[b] *Departamento de Ingeniería, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FES-C), 54714, Cuautitlán Izcalli, Estado de México, México*

Resumen

El péndulo invertido es uno de los sistemas utilizados para probar diferentes leyes de control y en el área académica es una herramienta para enseñar a los alumnos a sintonizar y calibrar las ganancias del control propuesto. En este artículo se presenta el diseño, desarrollo, construcción, ensamble y control de un péndulo invertido con volante inercial, el cual está enfocado a apoyar las labores académicas y que sea de arquitectura y software abierto para que pueda ser utilizado por cualquier estudiante o persona interesada en comprender las características de la variación de las ganancias en un control PID. Este modelo de péndulo presenta un reto adicional al controlar el volante inercial, y agrega un grado de libertad el cual hace más complejo el sistema y por lo tanto la dinámica de este. Cabe resaltar que se hace uso de una IA para ayudarnos a sintonizar el control PID. Todo esto es probado por medio de simulaciones en Matlab y con experimentos utilizando un prototipo construido utilizando manufactura aditiva.

Palabras clave: Control, PID, péndulo invertido, volante inercial.

Abstract

The inverted pendulum is a widely used system for testing different control laws, and in the academic field, it serves as an educational tool to teach students how to tune and calibrate controller gains. This article presents the design, development, construction, assembly, and control of an inverted pendulum with a flywheel, aimed at supporting academic activities. This system has been designed with open-source architecture and software, allowing its use by any student or individual interested in understanding the variations in gains of a PID control system. The proposed pendulum model presents an additional challenge due to the control of the flywheel, which adds a degree of freedom, making the system and its dynamics more complex. Furthermore, the use of artificial intelligence is highlighted to assist in tuning the PID controller. All these developments are tested through simulations in MATLAB and experiments carried out with a prototype built using additive manufacturing.

Keywords: control, PID, inverted pendulum, inertial flywheel.

1. Introducción

El control de sistemas lineales y no lineales ha sido estudiado como parte de las estrategias de control (Kuo, 1996), los cuales necesitan ser probados y analizados no solo de manera teórica, si no también, de forma experimental (Merli, 2018), por ese motivo, el péndulo invertido es uno de los sistemas no lineales más utilizados para este fin, en materias como dinámica de sistemas físicos, teoría de control y análisis de sistemas. Ya que, a pesar de su naturaleza no lineal, su comportamiento modelado matemáticamente de forma sencilla y bajo ciertas premisas puede obtenerse un sistema lineal y ser estudiado localmente, pero también se pueden realizar adecuaciones al péndulo y modelarlo de manera no lineal para obtener leyes de control complejas y poder comprobar de manera práctica lo modelado matemáticamente en un sentido u otro. Por lo tanto, es un buen sistema dinámico para estudiar la parte teórica y comprobarla con un prototipo experimental que abarca la parte académica, tanto a sistemas lineales (Salgado, 2005) como no lineales (Seron, 2000).

*Autor para la correspondencia: rdcruz@comunidad.unam.mx
Correo electrónico: rdcruz@comunidad.unam.mx (Raúl-Dalí Cruz-Morales), gonzalosieben@gmail.com (Gonzalo Hedain L´opez-Mera), erick.padilla@upatlacomulco.edu.mx (Erick Axel Padilla-Garc´ıa), rd-cruz@comunidad.unam.mx (Ra´ul Dal´ı Cruz-Morales) y dativa19@hotmail.com (David Tinoco-Varela).

Historial del manuscrito: recibido el 27/10/2024, última versión-revisada recibida el 12/12/2024, aceptado el 16/12/2024, publicado el 08/04/2025. **DOI:** https://doi.org/10.5281/zenodo.15132487

El péndulo invertido es un sistema dinámico completo, el cual está compuesto por una varilla rígida y una masa en un extremo, mientras que el otro extremo está conectado a un dispositivo que puede controlar su giro, normalmente un motor eléctrico, este dispositivo es el que inyecta la energía o fuerza para mantener en su posición a la masa. Adicionalmente, se puede agregar otro grado de libertad y por lo tanto mayor complejidad, si se pone este péndulo invertido sobre un vehículo en movimiento (Guerra, 2019), con lo cual ahora al desplazar al vehículo, este enviará la energía hacia el péndulo para mantener su verticalidad. En los años 70's Katsuhisa Furuta, se dio cuenta de que la distancia que recorría el vehículo tendría que limitarse al realizar experimentos físicos, por lo cual no siempre era conveniente utilizar una base que se desplazará linealmente e inventó el péndulo invertido de Furuta (García, 2015), el cual consta de un brazo que gira sobre una base y al extremo de ese brazo se coloca el péndulo invertido, con lo cual ahora no hay un desplazamiento lineal y se evitan las limitaciones de las distancias, pero se añade complejidad al tener que estudiar las fuerzas centrífugas y de Coriolis que aparecen en este nuevo sistema dinámico (Aracil, 2005).

Este sistema es relativamente sencillo de fabricar y muy versátil, ya que se le pueden agregar más grados de libertad o complejidades de manera simple, la primera de ellas es intentar controlar el péndulo desde su estado de reposo, hasta una posición vertical invertida y mantenerlo ahí (Masante, 2016), esto no resultaba sencillo, ya que necesitaba de leyes de control suaves o que fueran capaces de intercambiar la parte de control para iniciar el movimiento de la masa hasta que pasara a la posición invertida y de ahí una ley que controlara la masa en su punto de equilibrio inestable, adicional a esto, se puede agregar un volante de inercia en su extremo, en lugar de una masa fija, y controlar tanto el giro del volante de inercia como el del péndulo para lograr el equilibrio del sistema de manera global y no solo localmente (Escobar-Dávila, 2013).

Existen diversos métodos de control para enfrentarse al problema de controlar el péndulo invertido, uno de ellos es el método clásico que se basa en la retroalimentación de estados (Sanabria, 2009), es decir, debe haber un sensor que indique la posición actual del péndulo y retroalimentar esta señal para generar el control, los estados generados pueden ser parciales y la retroalimentación se adecua para el control del tipo de péndulo que se esté estudiando.

Otro método es el de control basado en la energía, en dónde se modela la energía de la naturaleza que se ocupa para la rotación, translación, gravedad, cinética, potencial, etc. Donde se analiza el consumo energético del sistema y se modela el sistema con base en métodos Hamiltonianos o de Lagrange (Hernández Largacha, 2012) y se realiza un moldeo de la energía para que el control sea desarrollado y se obtenga el objetivo de controlar el péndulo invertido.

El control por lógica difusa (Kouro, 2002) es otro método que se utiliza para el control de este tipo de sistemas, donde se crea una relación con los elementos del sistema y el comportamiento que estos deben realizar, para lo cual se utilizar conjuntos de frontera que no están definidos claramente, es decir, las definiciones son "difusas" y se ocupan reglas de comportamiento que siguen la lógica de que si ocurre un evento, entonces se debe actuar de cierta forma, pero si el evento cambia, también la respuesta va actuar de forma diferente.

De esta manera se vislumbra la importancia y versatilidad de este sistema, el cual ocupa poco espacio y puede ser utilizado para diseñar distintas leyes de control. Por lo cual, se pretende realizar un diseño desde cero de un péndulo invertido el cual utilice software y hardware abierto (Lazalde, 2015), con la finalidad de que pueda ser replicado por cualquier institución de educación o persona interesada y fabricado para que sea utilizado a nivel académico, de forma sencilla, didáctica y gratuita.

Con respecto al uso de las IA, en la literatura puede ver su uso para consulta, tutoría y hasta referencias de construcción de dispositivos y explicación de las diversas estrategias de control, sin embargo, no se han registrado su uso en la sintonización directa del control, dejando que la IA tome decisiones de las señales de control y además probadas de manera experimental. Por ello, en este trabajo se presenta una opción reproducible de libre acceso y libre programación donde es posible experimentar con el uso de la IA en el momento de establecer valores de las diversas estrategias de control, lo cual podría para podría ser referencia para el uso de herramientas de IA en la toma de decisiones de control.

En el presente trabajo se realiza el prototipo de un péndulo invertido con volante de inercia, el cual se diseña en un programa CAD, después se fabrica con un equipo de manufactura aditiva (impresión 3D) y se desarrolla la electrónica y leyes de control adecuadas para controlar el péndulo en forma invertida y probar su estabilidad de manera global. El trabajo se presenta de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan los materiales y método a utilizar para la creación del prototipo, manufactura, ensamble y control de este, además de presentar la modelación matemática del sistema, se muestran simulaciones numéricas del comportamiento de la ley de control diseñada. La sección 3 muestra los resultados obtenidos de manera experimental con el prototipo fabricado y la ley de control aplicada al sistema. La sección 4 da pie a la discusión de los resultados, mostrando la sencillez de poder replicar lo presentado en este trabajo y que puede llegar a ser de mucha utilidad en la vida académica de las universidades o centros de enseñanza. Por último, las conclusiones de presentan en la sección 5

2. Materiales y Método

Para la realización del prototipo de péndulo invertido aquí presentado, se utilizan diversos materiales, el primero de los cuales y que es de vital importancia, es un motor de corriente directa sin escobillas (*brushless*) con un voltaje de trabajo de 9V, modelo A2212 de la marca Tecneu, los motores *brushless* como este, necesitan un controlador de velocidad electrónico (ESC), que utiliza retroalimentación de la posición del rotor del motor para controlar el flujo de la corriente que atraviesa las bobinas del estator. Este controlador ESC se utiliza para el

control de la velocidad del motor, el método que utiliza es mediante la modulación de ancho de pulso (PWM) el cual proporciona un control de velocidad más preciso y también ayuda a reducir el consumo de energía y el desgaste del motor, el modelo de este controlador es el ESC30A, el cual soporta hasta 15 A de corriente máxima.

Adicionalmente se necesita un giroscopio y acelerómetro para poder obtener las velocidades y aceleraciones del péndulo invertido, para esto se optó por utilizar un sensor de movimiento que incluye ambos dispositivos en una sola tarjeta electrónica cuyo modelo es MPU-6050, esta tarjeta cuenta con un acelerómetro que es capaz de medir la aceleración lineal en los tres ejes coordenados y un giroscopio que mide la velocidad rotacional también en los tres ejes, de manera individual; cuenta además con una comunicación tipo I^2C y SPI, las cuales tienen ciertas diferencias, mientras que la comunicación I^2C es muy buena para enviar datos pequeños, a un bajo pin y baja velocidad, la comunicación SPI es recomendada para enviar datos grandes, a baja latencia y una alta velocidad. Este dispositivo es utilizado como el sensor de velocidad y aceleración del péndulo y de esta forma poder obtener las posiciones del mismo.

Como parte central del control se utiliza la tarjeta de desarrollo Arduino UNO rev3, la cual consta de un microcontrolador ATmega328P, cuenta con 14 pines de entrada/salida digital, 6 de los cuales pueden ser utilizados como salidas PWM, además tiene 6 entradas analógicas, un resonador cerámico de 16 MHz, y puede ser alimentada por USB o conector de 5V.

Como elemento final se adquirió un rodamiento mecánico que permite el movimiento rotacional relativo entre dos piezas de diámetro de 8 mm.

2.1. Diseño del péndulo invertido

Para el diseño del péndulo invertido, se trabajó con el software SolidWorks 2023 con licencia educativa, en el cual se dibujaron los modelos CAD del brazo del péndulo y el volante de inercia que se muestran en la figura 1.

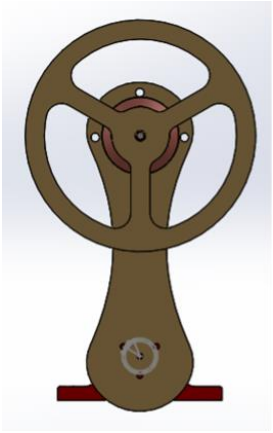

Figura 1: Vista frontal del péndulo invertido con volante de inercia diseñado en SolidWorks.

Al ser diseñado desde cero, se conocen las características geométricas, la longitud del brazo del péndulo es L=15 cm y el diámetro total del volante de inercia es D=8 cm.

Una vez realizado el diseño en CAD, se guarda la imagen en formato STL el cual se pasa al software Ultimaker Cura 5.7.1 para obtener el código G y M que necesita la impresora 3D para manufacturar ambas piezas.

La impresora 3D utilizada para imprimir el péndulo invertido es de la marca Flashforge, con un volumen de trabajo de 280x250x300 mm, una velocidad máxima de impresión de 100 mm/s, y es capaz de imprimir materiales como PLA, PET-G, ABS, entre otros. En la Figura 2 se muestra el proceso de impresión del péndulo invertido y el volante de inercia.

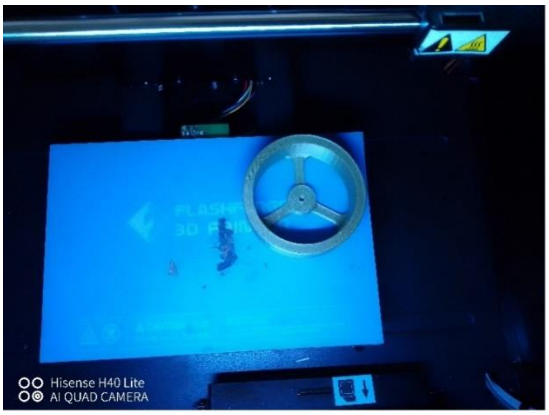

Figura 2: Impresión del volante de inercia en la impresora Flashforge.

Una vez impresos tanto el brazo como el volante de inercia se ensamblan y se conectan al circuito electrónico previamente desarrollado.

2.2. Modelo matemático del péndulo invertido

Para modelar matemáticamente al péndulo invertido, se utiliza el método de la energía de Euler-Lagrange. Por lo cual lo primero es identificar las variables a utilizar, para esto, se toma como referencia la Figura 3.

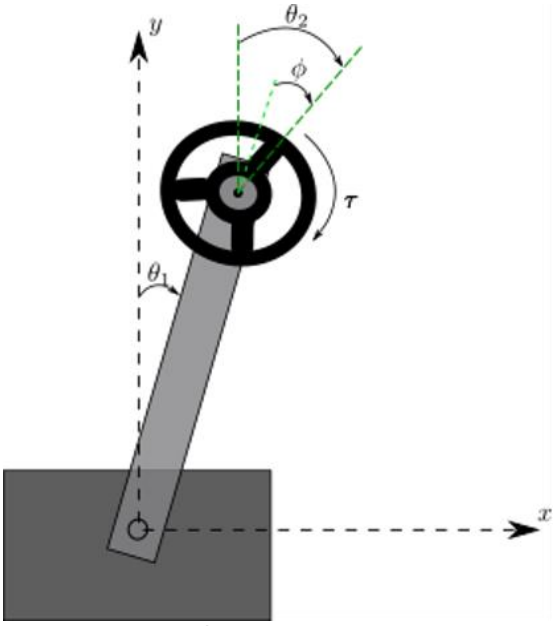

Figura 3: Diagrama del péndulo invertido con volante de inercia.

Donde, θ_1 es el ángulo entre el brazo del péndulo y el eje Y del marco de referencia, θ_2 es el ángulo del volante de inercia y el eje Y, φ es el ángulo relativo entre el eje del brazo y el del volante de inercia y τ es el torque que da el motor que mueve el volante de inercia.

A partir de la Figura 3, se obtiene la ecuación,

$$J = J_p + m_p J_p^2 + m_r J_r^2 \quad (1)$$

Donde J es el momento de inercia total del sistema, J_p es el momento de inercia del péndulo, J_r es el momento de inercia del volante de inercia, m_p es la masa del péndulo y m_r es la masa del volante de inercia. Para obtener la ecuación de la energía, se ocupa el Lagrangiano (Patete, 2011),

$$L = E_c - E_p \quad (2)$$

Donde E_c es la energía cinética y E_p es la energía potencial del sistema, por lo tanto,

$$E_c(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_2^{\,2} \quad (3)$$

y la energía potencial está dada por,

$$E_p = mgl(1 + cos\theta_1) \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en (2), se obtiene,

$$L = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_2^{\,2} - mgl(1 + \cos\theta_1) \quad (5)$$

Que es la ecuación de la energía del sistema del péndulo invertido considerando un volante de inercia.

2.3. Obtención de la ley de control para el péndulo invertido

A partir de la ecuación (5) se pueden obtener las ecuaciones de movimiento del sistema del péndulo invertido con un volante de inercia. Para lo cual, se tiene,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\tau \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau \quad (7)$$

Realizando las derivadas correspondientes y sustituyendo, se obtiene,

$$J\ddot{\theta}_1 - mgl \sin\theta_1 = -\tau \quad (8)$$

$$J_r \ddot{\theta}_2 = \tau \quad (9)$$

Donde m es la masa del sistema, g la gravedad, l la longitud del péndulo y τ el torque del motor a utilizar. Para conocer el torque del motor eléctrico, se sabe que está directamente relacionado con la corriente que consume el motor, por lo tanto, la ecuación que rige esto es,

$$\boldsymbol{\tau = ki} \quad (\mathbf{10})$$

Donde k es la constante del motor proporcionada por el fabricante e i es la corriente que consume el motor. Sustituyendo (10) en las ecuaciones (8) y (9) se tiene,

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{mgl}{J} \sin\theta_1 = -\frac{k}{J} i \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k}{J_r} i \quad (12)$$

Para realizar el control de este sistema, se propone,

$$u = k_u \tau = k_u k i \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en (11) y (12), se obtiene,

$$\ddot{\theta}_1 - a \sin\theta_1 = -bu \quad (14)$$

$$\ddot{\theta}_2 = cu \quad (15)$$

A este sistema se le aplica un control PID para poder mantener la posición vertical invertida por parte del péndulo y el volante de inercia. Con,

$$e_1 = \theta_{1d} - \theta_1 \quad (16)$$

$$e_2 = \theta_{2d} - \theta_2 \quad (17)$$

Donde e_1 y e_2 son los errores del sistema

Simulación numérica.

En esta subsección se presentan las simulaciones realizadas y también los resultados obtenidos experimentalmente con el péndulo invertido realizado.

La simulación numérica se realiza en el software MATLAB versión R2024a instalado en una computadora con procesador Intel CORE I7, 16 Gb de memoria RAM.

```
%% parametros del sistema mecanismo
l=0.015;   % longitud
lc1=L/2; %mitad de longitud
R=0.008;  % radio del volante
g=9.81;   % gravedad
b1=0.01;    % amortiguamiento
m1=0.01;    % masa en Kg
b2=0.01;    % amortiguamiento
m2=0.05;    % masa en Kg
%% 3. parámetros del sistema del motor
Jm=542e-6;        % Inercia del rotor Kgm2
Kb=102*(2*pi/60);  % Constante Velocidad-Voltage de rpm a rad/s
Ka=93.4e-3;      % Constante Par-corriente Nm/A
Rm=0.608;         % Resistencia del motor Ohms
Lm=0.423e-3;        % Inductancia del motor H
bm=0.001;          % fricción viscosa (amortiguador)
```

Figura 4: Parámetros del péndulo invertido, volante de inercia y motor eléctrico.

En la Figura 4 se muestran los parámetros del sistema péndulo invertido con volante de inercia, los cuales fueron obtenidos a partir de la composición del material con el que fueron elaborados, tanto el péndulo como el volante de inercia son del material PLA y el peso fue obtenido con una báscula, además los parámetros del motor eléctrico se obtuvieron directamente del fabricante. Los resultados de la simulación realizada, se muestran a como sigue, la simulación general del comportamiento en el plano X-Y del péndulo invertido se presenta en la Figura 5, mientras que en la Figura 6 se presenta la posición del péndulo invertido, la velocidad que alcanza para ponerse en posición vertical invertida es presentada en la Figura 7, en la Figura 8 se presenta la velocidad que alcanza el motor eléctrico conectado al volante de inercia, por último la figura 9 muestra la corriente que consume este motor.

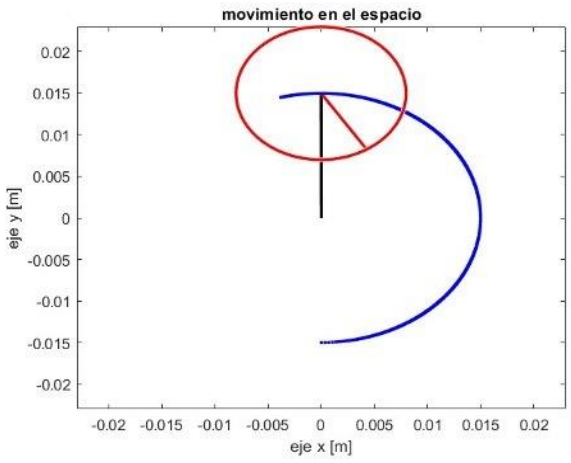

Figura 5: Parámetros del péndulo invertido, volante de inercia y motor eléctrico.

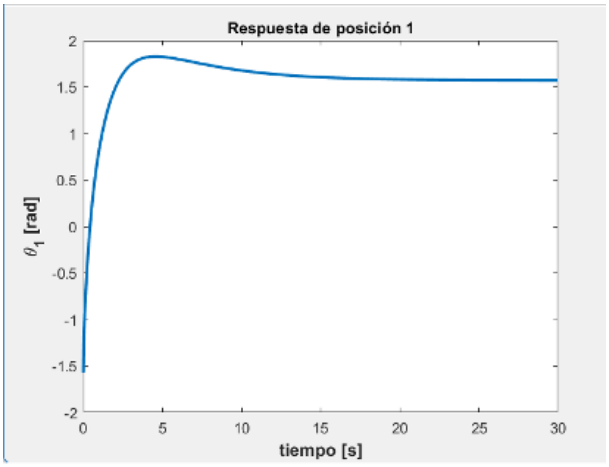

Figura 6: Posición del péndulo invertido.

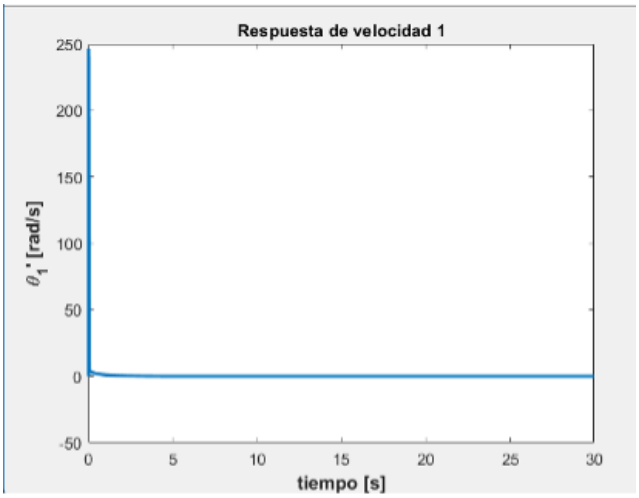

Figura 7: Velocidad de respuesta del péndulo invertido.

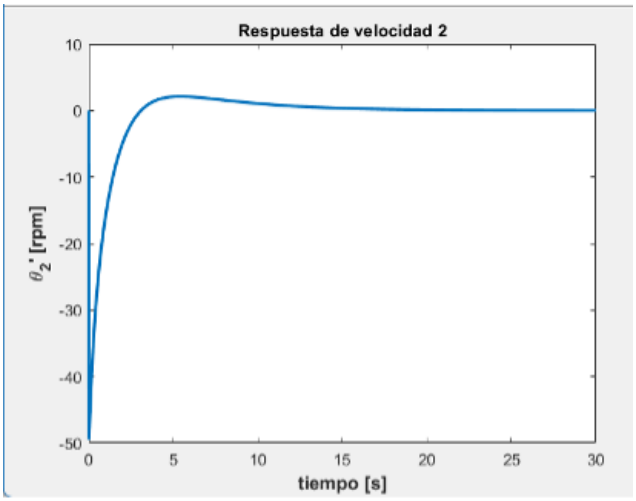

Figura 8: Velocidad del motor conectado al volante de inercia.

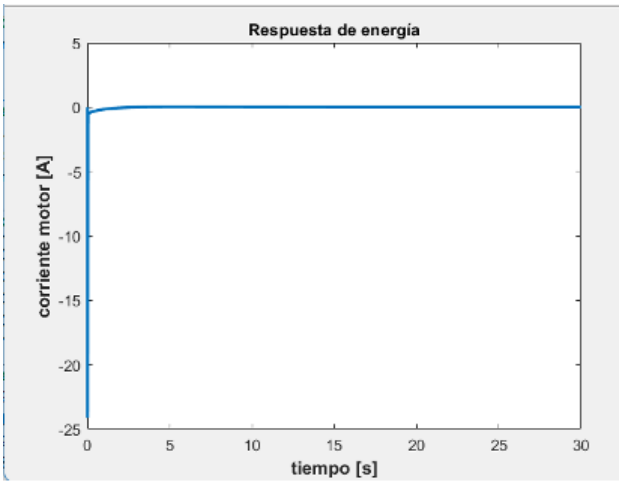

Figura 9: Corriente consumida por el motor eléctrico del motor de inercia.

2.4. Resultados experimentales.

Se propone una plataforma experimental de libre programación, reproducible y escalable mediante manufactura aditiva en un área de impresión de 280x250x300 [mm], a una velocidad máxima de impresión de 100 [mm/s], con materiales como PLA, PET-G, ABS. Para ello, cabe mencionar que los pesos, dimensiones, tamaños tanto del péndulo como del volante fue una constante revisión y combinación entre los resultados de simulación, asegurándonos que matemáticamente el control del volante tenga efecto en el movimiento del péndulo, dando como resultado una longitud del brazo del péndulo es L=15 [cm] y el diámetro total del volante de inercia es D=8 [cm]. Para la instrumentación de la plataforma se cuenta con un Arduino UNO, un motor BLDC de 12 [V] sin escobillas, con una potencia nominal de 70 [W] a 1000 rpm y un peso de 0.047 [Kg] con un controlador tipo ESC, muy usado en sistemas aéreos autónomos tipo Drone. Para medir el punto deseado de control, se instaló un sensor tipo IMU con acelerómetro y giroscopio tipo MPU-5060, el cual se comunica con Arduino a través del bus I2C o SPI.

Para los experimentos, se usó el software de Arduino IDE, con un tiempo de muestreo de 200 microsegundo, suficiente para ejecutar la ley de control, obtener las señales angulares de la IMU (calibrada) a través de I2C. El objetivo es iniciar en una posición de equilibro estable de $-\frac{\pi}{2}$, partiendo del reposo, y mediante rotaciones en el volante inercial levantar el péndulo y mantenerlo en regulación en el punto de $\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando el péndulo se encuentra de manera vertical, de tal forma que mediante la ley de control de volante permita la regulación del péndulo en tiempo $t \geq 0$, como puede verse en la Fig. 5. Para ello, se propone el uso de un controlador PID, ya que es el controlador más usado en la industria, y muestra robustez ante ligeras perturbaciones en el péndulo, manteniéndolo en el punto deseado de regulación.

En las Figuras 10 y 11 se muestra la plataforma experimental realizada, tanto en reposo como en movimiento.

Figura 10: Plataforma experimental del péndulo invertido con volante de inercia.

Es sabido que MATLAB cuenta con herramientas de Autotune para sintonizar el controlador PID, sin embargo, de manera experimental estos efectos podrían varias debido a factores externos, términos no modelados presentes, perturbaciones, ruido eléctrico, etc. Por ello, usamos una IA que nos ayude a proponer ganancias para el controlador PID que puedan ayudar al comportamiento real, obteniendo la comparación en la Tabla 1. De dicha tabla, se presenta una propuesta heurística con lo cual se podía ver regulación en estado estable. Posteriormente, se usó la herramienta de Autotune de MATLAB, sin embargo, se observaba un mejor comportamiento solo usando la ganancia KP en un valor de 20. Sin embargo, de manera experimental, es posible usar cualquier IA de acceso libre de la web, como puede ser Poe, Assistant, GPT-4o y en cualquiera de ellas (que reconozca el código de MATAB) es posible preguntar por una mejora de sintonización. Nosotros usamos GPT-4o con la pregunta “De este código, sintoniza las ganancias PID de control, para mejorar el comportamiento experimental del sistema” arrojándonos como respuesta, las ganancias mostradas den la Tabla 1.

Tabla 1: Métodos de sintonización usados para control PID

Método	Kp	Kd	Ki
Heurístico	15	0.01	0.1
Autotune MATLAB	20	0	0
Usando IA	20	1	5

Los resultados obtenidos y el comportamiento del péndulo pueden verse en la figura 11, donde adicionalmente se presenta las señales obtenidas a través del puerto COM del Arduino, en el cual se puede observar que el control mantiene cerca del punto de estabilidad vertical al péndulo, realizando

las acciones de control necesarias alrededor de +/- 0.14 [rad] (+/- 8 [deg]) del error de posición en estado estable.

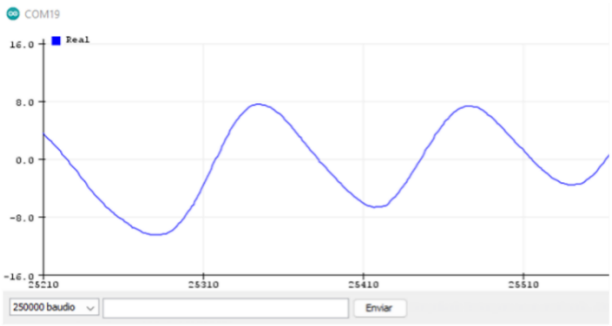

Figura 11: Resultados experimentales de posición del péndulo invertido en grados.

3. Discusión

Se presentan resultado preliminares del control PID aplicado a un péndulo invertido con volante de inercia, el cual fue diseñado con elementos de bajo costo, arquitectura abierta y software libre, con la finalidad de poder ser replicado por cualquier persona interesada en el tema y particularmente por académicos o entidades académicas que tengan que ver con el área de ingeniería y específicamente con temas de dinámica de sistemas físicos, teoría de control, robótica y mecatrónica, entre otros.

Los resultados obtenidos de manera experimental fueron realizados con el apoyo de una inteligencia artificial (IA) para poder sintonizar de manera más eficaz las ganancias del controlador PID, con lo cual también se comienza a experimentar el uso de la IA, aunque sea en pequeños detalles del desarrollo de las leyes de control. Estas ganancias fueron ingresadas al programa MATLAB y con pocos ajustes por parte del programador, se obtuvo una respuesta suave y rápida del controlador.

Cabe mencionar que la IA ha sido utilizada como apoyo, y no como un generador de controlador con ganancias. Es decir, ya se había realizado el proceso de sintonización de manera heurística hasta lograr una regulación dentro del %5 de error en estado estable, sin embargo, de manera experimental, el uso de solo usar Kp, se tienen vibraciones, ruido eléctrico y esfuerzo en el motor que nos se logra ver en simulación. También usamos herramientas como Autotune de MATLAB, sin embargo, seguíamos sin usar el termino derivativo e integral del control. Así, usando una IA como Assistant, Poe o GPT-4o se propone una sintonización que pudiera ser ejecutada de manera experimental, basada en los resultados obtenidos anteriormente.

Una vez concluidas las simulaciones, se procedió a aplicarlo a un sistema físico real del péndulo invertido, en dónde a pesar de no obtener la misma respuesta que se vio en las simulaciones prestadas en la Figura 5, ya que en el prototipo real, el péndulo queda en su punto de estabilidad pero aún realizando acciones de control constantes para poder mantener la verticalidad, la respuesta obtenida es satisfactoria y nos permite seguir mejorando el sistema y en un futuro agregar variables a la ecuación para poder controlar de una forma más eficiente el péndulo invertido.

Un tema importante de impacto en discusión es justamente el uso de las IA en el campo de la educación y la investigación de control de sistemas, ya que mediante plataformas como la propuesta (libre acceso, programación, reproducible) es posible entrar en el campo de la innovación frugal, la cual destaca el máximo aprovechamiento de la innovación con los mínimos recursos posible al alcance de todos, es decir, con total acceso en el campo de la educación. Esto también puede generar gran impacto en las pruebas experimentales de diversas estrategias de control, ya que en este caso la IA tuvo decisión directa del control, mostrando un resultado favorable, siendo la sintonización heurística del PID un proceso que puede ser tedioso al encontrar un buen conjunto de valores que permitan un comportamiento deseado, pero con una constante oportunidad de mejora.

4. Conclusiones y trabajo futuro

El estudio de la dinámica de los sistemas físicos y su control, son temas muy utilizados en la academia, por lo cual se necesitan sistemas simples y de bajo costo para poder ser utilizados en la enseñanza de las nuevas generaciones.

En el presente documento se presentó el diseño desde cero de un péndulo invertido con volante de inercia, se derivaron sus ecuaciones de movimiento y se implementó físicamente el control. Las simulaciones realizadas, se basan en datos reales tanto de peso, dimensiones, características de amortiguamiento, inercia y fricción de los elementos que componen el péndulo, y con estos datos muestran una respuesta adecuada y que cumple con el objetivo de control de mantener al péndulo en su punto de equilibrio vertical de manera global, esta respuesta se logra sintonizando de manera adecuada las ganancias, lo cual fue hecho con apoyo de la IA para tener un rango más cercano a la sintonización correcta del sistema con estas características específicas.

Por otro lado, como trabajo futuro queda el mejorar el prototipo y ajustar el control de este y la respuesta del movimiento del volante de inercia para que la respuesta sea más cercana a las simulaciones realizadas y el péndulo quede en su punto de equilibrio de forma más estable.

5. Agradecimientos

Se agradece el apoyo de la UNAM con el proyecto CI2446.

6. Referencias

Aracil, J. &. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. . *Revista Iberoamericana de automática e informática industrial*, 2(2), 8-19.

Escobar-Dávila, L. F.-G.-B. (2013). Control global del péndulo de furuta empleando redes neuronales artificiales y realimentación de variables de estado. *TecnoLógicas*,, (30), 71-94.

García, G. T. (2015). Control de un péndulo de furuta. Una revisión del estado del arte. *Scientia et technica*, 20(4), 326-334.

Guerra, R. (2019). *Control de péndulo invertido sobre carro móvil.*

Hernández Largacha, A. L. (2012). *Control inteligente del péndulo invertido.*

Kouro, S. &. (2002). Control mediante lógica difusa. *Técnicas Modernas en Automática*, 1, 1-7.

Kuo, B. C. (1996). *Sistemas de control automático.* Pearson Educación.

Lazalde, A. T.-V. (2015). *Hardware: ecosistemas de innovación y producción basados en hardware libre.*

Masante, A. E. (2016). *Servomecanismos: control de péndulo invertido.*

Merli, G. O. (2018). Ecuaciones diferenciales de la física clásica. Interpretación y solución mediante dinámica de sistemas. *Revista UIS Ingenierías, 17*(1), 51-58.

Patete, A. A. (2011). Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido. . *Revista Ingeniería UC*, , 18(1), 12-22.

Salgado, M. E. (2005). *Análisis de sistemas lineales.* . Pearson Educación.

Sanabria, C. A. (2009). Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. . *Tecnura*, 59-69.

Seron, M. M. (2000). *Sistemas no lineales. Departamento de Electrónica.* Universidad Nacional de Rosario.

.